

**CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”**

Ediția a XXVII-a

ETAPA NAȚIONALĂ – 17 mai 2025

Clasa a XI-a – Secțiunea H1 – Filieră tehnologică

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Subiectul 1:

Considerăm $D(x)$ determinantul matricei $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

- Determinați numerele reale x astfel încât $A(x) \cdot A(-x) = A(-2023)$.
- Determinați numerele reale x pentru care $D(x) \leq 0$.
- Demonstrați că numărul $D(n)$ este par, pentru orice număr $n \in \mathbb{Z}$.

Soluție:

a) $A(x) \cdot A(-x) = \begin{pmatrix} -x^2 + 2 & 1 & 1 \\ 1 & -x^2 + 2 & 1 \\ 1 & 1 & -x^2 + 2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots 1p$

$A(x) \cdot A(-x) = A(-2023) \Rightarrow x^2 = 2025 \Rightarrow x = \pm 45 \dots\dots\dots 1p$

b) $D(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+2 & x+2 & x+2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x+2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} \dots\dots\dots 1p$

$D(x) = (x+2) \cdot (x-1)^2 \dots\dots\dots 1p$

$D(x) \leq 0 \Rightarrow (x+2) \cdot (x-1)^2 \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \{1\} \dots\dots\dots 1p$

c) Dacă $n = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D(n) = 2(k+1)(2k-1)^2 : 2 \dots\dots\dots 1p$

Dacă $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow D(n) = (2k+3) \cdot 4k^2 : 2 \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 2:

Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x+1)^2 e^x$.

- Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f , în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe axa Oy .
- Determinați imaginea funcției f .
- Demonstrați că $(x+1)^2 \leq 4e^{-3-x}$, pentru orice $x \in (-\infty, -1]$.

Soluție:

a) Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe axa $Oy \Leftrightarrow f'(a) = 0 \dots\dots\dots 1p$

$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)e^x \dots\dots\dots 1p$

$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = -3$ și $a = -1 \dots\dots\dots 1p$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3$ și $x = -1$

$f'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$, deci f crescătoare pe $(-\infty, -3]$ și f crescătoare pe $[-1, +\infty)$

$f'(x) \leq 0, \forall x \in [-3, -1]$, deci f este descrescătoare pe $[-3, -1]$ 1p

f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $f(x) \geq f(-1) = 0$, obținem $\text{Im}f = [0, +\infty)$ 1p

c) f este crescătoare pe $(-\infty, -3]$ și f este descrescătoare pe $[-3, -1]$, deci $f(x) \leq f(-3), x \leq -1 \dots\dots\dots 1p$

$f(-3) = 4e^{-3}$, deci $(x+1)^2 e^x \leq 4e^{-3} \Leftrightarrow (x+1)^2 \leq 4e^{-3-x}, \forall x \in (-\infty, -1] \dots\dots\dots 1p$

Subiectul 3:

Un camion trebuie să transporte marfă pe o distanță de 500 de km. Costul total al transportului este dat de suma dintre un cost fix de 4 lei pe kilometru (pentru plata salarizării șoferului și pentru asigurările de transport) și un cost variabil pentru combustibil dat de funcția $C(v) = \frac{5000}{v} + 2v$, unde v este viteza camionului exprimată în km/h .

- Calculați costul total al transportului, dacă șoferul conduce cu o viteză de $80 km/h$.
- Determinați viteza cu care trebuie să meargă camionul pentru a minimiza costul total și aflați costul minim al transportului.

Soluție:

- Notează $C_{fix} = 500 \cdot 4 = 2000$ lei – costul fix, iar costul total calculat pentru viteza de $80 km/h$ va fi :
 $C_{total}(80) = C_{fix} + C(80) = 2000 + \frac{5000}{80} + 2 \cdot 80 = 2000 + 62,5 + 160 = 2222,5$ lei1p
- Costul total este minim atunci când costul variabil al combustibilului este minim.1p
 Calculează $C'(v) = -\frac{5000}{v^2} + 2$ 1p
 Rezolvă ecuația $C'(v) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5000}{v^2} + 2 = 0 \Leftrightarrow v^2 = 2500 \Leftrightarrow v = \pm 50$ 1p
 Dintre cele două soluții, convine doar $v = 50 > 0$ (viteza este pozitivă)1p
 Verifică dacă $v = 50$ este punct de minim local calculând: $C''(50) = \frac{10000}{50^3} = 0,08 > 0$ (sau folosește tabelul de variație), deci $v = 50 km/h$ este viteza optimă pentru care $C(v)$ este minim1p
 Calculează costul total minim :
 $C_{total}(50) = C_{fix} + C(50) = 2000 + \frac{5000}{50} + 2 \cdot 50 = 2000 + 100 + 100 = 2200$ lei1p

Subiectul 4:

În tabelul de mai jos sunt prezentate date referitoare la vânzările realizate de o reprezentanță auto pentru trei modele de mașini – **Kia Sportage**, **Dacia Duster** și **Tesla X** – în primele patru luni ale anului 2024, precum și încasările lunare (în mii de euro) aferente acestor vânzări.

Marca \ Luna	Kia Sportage (număr unități vândute)	Dacia Duster (număr unități vândute)	Tesla X (număr unități vândute)	Încasări totale lunare (mii euro)
Ianuarie	6	12	3	450
Februarie	7	10	2	406
Martie	4	9	2	314
Aprilie	6	11	a	478

Prețul de vânzare al fiecărui model de mașină nu s-a modificat pe parcursul celor 4 luni.

- Determinați prețul de vânzare (în mii de euro) pentru fiecare model de mașină.
- Calculați numărul de unități ale modelului Tesla X vândute în luna aprilie.

Soluție:

a) Pe baza datelor din tabel, dacă notăm cu x, y, z prețurile celor 3 tipuri de mașini, formăm sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} 6x + 12y + 3z = 450 \\ 7x + 10y + 2z = 406 \\ 4x + 9y + 2z = 314 \\ 6x + 11y + az = 478 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 7 & 10 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \\ 6 & 11 & a \end{pmatrix}}_M \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 450 \\ 406 \\ 314 \\ 478 \end{pmatrix}}_B \dots\dots\dots 1p$$

Pentru primele 3 luni, vom avea $M' = \begin{pmatrix} 6 & 12 & 3 \\ 7 & 10 & 2 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$, $B' = \begin{pmatrix} 450 \\ 406 \\ 314 \end{pmatrix}$ și $M' \cdot P = B'$, de unde obținem, pentru M' inversabilă, că $P = (M')^{-1} \cdot B'$ 1p

Găsim $\det M' = 9$, deci M' este inversabilă și determinăm $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & 0 & 9 \\ 23 & -6 & -24 \end{pmatrix}$ 2p

Apoi calculăm $P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & 0 & 9 \\ 23 & -6 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 450 \\ 406 \\ 314 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 234 \\ 126 \\ 378 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 \\ 14 \\ 42 \end{pmatrix}$ 1p

Așadar:

$x = 26$ mii euro (preț **Kia Sportage**);

$y = 14$ mii euro (preț **Dacia Duster**);

$z = 42$ mii euro (preț **Tesla X**)1p

SOLUȚIE ALTERNATIVĂ:

Notând cu x, y, z prețurile celor 3 modele de mașini se scrie pe baza tabelului din enunț sistemul

$$\begin{cases} 6x + 12y + 3z = 450 \\ 7x + 10y + 2z = 406 \\ 4x + 9y + 2z = 314 \\ 6x + 11y + az = 478 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

Rezolvăm sistemul format din primele 3 ecuații, găsim $\det M' = 9$, apoi folosim regula lui Cramer.....1p

$$d_x = \begin{vmatrix} 450 & 12 & 3 \\ 406 & 10 & 2 \\ 314 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 234; d_y = \begin{vmatrix} 6 & 450 & 3 \\ 7 & 406 & 2 \\ 4 & 314 & 2 \end{vmatrix} = 126; d_z = \begin{vmatrix} 6 & 12 & 450 \\ 7 & 10 & 406 \\ 4 & 9 & 314 \end{vmatrix} = 378 \dots\dots\dots 3p$$

Apoi calculează:

$$x = \frac{d_x}{\det M'} = \frac{234}{9} = 26 \text{ mii euro – prețul Kia Sportage}$$

$$y = \frac{d_y}{\det M'} = \frac{126}{9} = 14 \text{ mii euro – prețul Dacia Duster}$$

$$z = \frac{d_z}{\det M'} = \frac{378}{9} = 42 \text{ mii euro – prețul Tesla X} \dots\dots\dots 1p$$

b) Încasările pe luna aprilie în funcție de numărul de mașini de fiecare fel vândute sunt date de relația:

$$6 \cdot 26 + 11 \cdot 14 + a \cdot 42 = 478 \Leftrightarrow 42a = 478 - 6 \cdot 26 - 11 \cdot 14 = 168 \Rightarrow a = \frac{168}{42} = 4$$

Așadar, în aprilie s-au vândut 4 mașini Tesla X1p